

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОМЫШЛЕННОГО РОБОТА И ВИБРАЦИОННОГО УСТРОЙСТВА

Мартынович Никита Александрович⁽¹⁾, Вартанов Михаил Владимирович⁽²⁾, Мамфумо Элдридж⁽³⁾

Аспирант 3 года⁽¹⁾, проф., д.т.н.⁽²⁾, студент 5 курса⁽³⁾

кафедра «Технология машиностроения»

Университет машиностроения

Научный руководитель: Л.В. Божкова,

доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика»

Величина погрешности позиционирования промышленного робота с программным управлением и пассивной адаптацией зачастую не соответствует требуемым условиям собираемости деталей. При этом целесообразным является использование специализированных устройств, существенно уменьшающих первоначальную погрешность позиционирования робота.

В работе [1] и [2] предложена конструкция такого дополнительного специализированного устройства, представляющего собой двухзвенный манипулятор, каждое звено которого приводится в движение от отдельного привода. Звенья этого устройства совершают одновременно вибрационные колебания вокруг взаимно перпендикулярных осей. Втулка (базовая деталь) закреплена на диске, жестко связанном со вторым звеном двухзвенного специализированного устройства. Устанавливаемая деталь – вал упруго базируется в схвате робота (Рис. 1а).

При этом упругие связи в схвате допускают перемещения устанавливаемой детали в вертикальной плоскости по двум взаимно перпендикулярным направлениям (Рис. 1б).

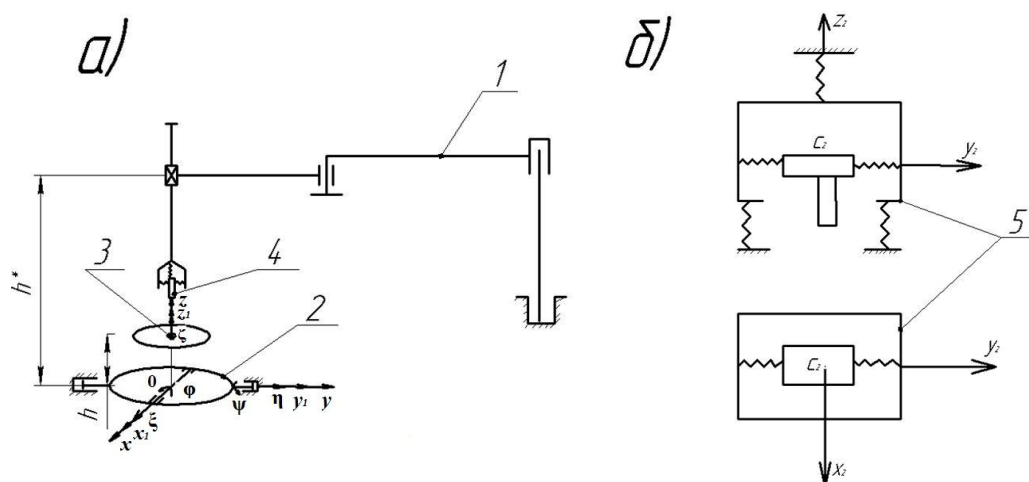


Рис. 1. Кинетическая схема роботизированной сборки при наличии вспомогательного специализированного вибрационного устройства (а) и пассивной адаптивной головки (б):

- а) 1 – Робот, 2 – Вибрационное устройство, 3 – Базовая деталь (втулка), 4 – Устанавливаемая деталь (вал);
- б) Кинетическая схема упругого закрепления вала в схвате.

Для определенности на рисунок 1а введены три системы координат с общим началом в точке 0:

$Oxyz$ – неподвижная система координат;

$Ox_1y_1z_1$ и $O\xi\eta\zeta$ – системы координат, жестко связанные, соответственно, с первым и вторым звеньями вибрационного устройства. Система координат $Ox_2y_2z_2$ жестко связана с схватом робота (Рис. 1б).

Вибрационные колебания звеньев устройства происходят вокруг осей Oy и Oy_1 по законам:

$$\psi = A \sin kt, \quad \varphi = A \cos kt, \quad (1)$$

где A – амплитуда, k – круговая частота колебаний.

Рабочим движением основного манипулятора на этапе сопряжения деталей является поступательное перемещение звена, несущего схват вертикально вниз. В [1] рассмотрен случай, когда первоначальный контакт устанавливаемой детали происходит в одной точке с плоскостью ориентирующего диска, на котором закреплена втулка. Для этого случая получены дифференциальные уравнения движения центра масс устанавливаемой детали по отношению к неинерциальной системе отчета координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанной с базовой деталью. Анализ численного решения полученной системы дифференциальных уравнений показывает, что существуют области значений основных динамических и конструктивных параметров сборочного устройства, обеспечивающих асимптотическое приближение центра масс устанавливаемой детали к оси базовой детали. При этом условия собираемости удовлетворяются.

При дальнейшем сопряжении деталей возможны контакты сопрягаемых деталей в одной точке и в двух точках.

На первом этапе решения данной задачи исследуем случай контакта сопрягаемых деталей в одной точке. При этом возможны два варианта контакта деталей:

1. Контакт торца базовой детали с образующей устанавливаемой детали (Рис. 2а);
2. Контакт торца устанавливаемой детали с образующей базовой детали (Рис. 2б).

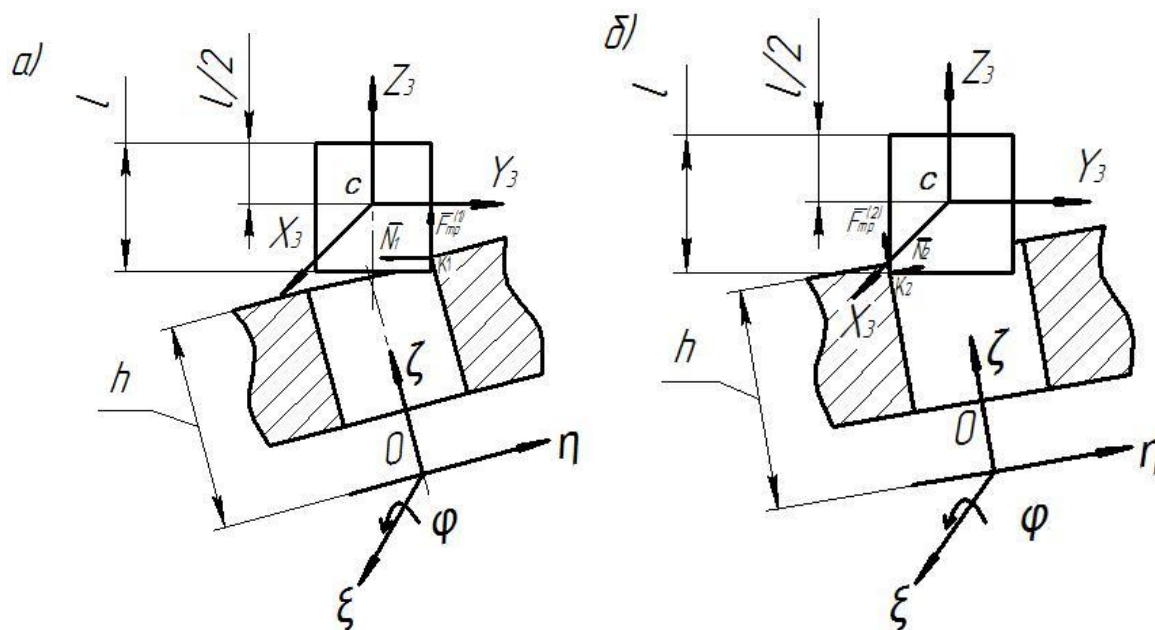


Рис. 2. Контакт сопрягаемых деталей в одной точке:

- а) торца базовой детали с образующей устанавливаемой детали;
 б) торца устанавливаемой детали с образующей базовой.

На рисунке 2 показана система координат $cx_3y_3z_3$, жестко связанная с устанавливаемой деталью.

Для каждого из вариантов контакта сопрягаемых деталей (Рис. 2а и Рис. 2б) необходимо построить дифференциальные уравнения движения центра масс вала (т. С) по отношению к неинерциальной системе координат $0\xi\eta\zeta$, жестко связанной с базовой деталью.

Сначала вычислим дифференциальные уравнения относительного движения центра масс вала при контакте его образующей с торцом втулки.

Дифференциальные уравнения относительного движения центра масс вала в форме второго закона Ньютона имеют вид [3]:

$$m\bar{a}_{cr} = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{F}_{mp}^{(1)} + \bar{F}^{yn} + \bar{F}_{ce}^{un} + \bar{F}_{ck}^{un} + \bar{F} \quad (2)$$

где $\bar{a}_{cr}$ – относительное ускорение центра масс вала, $m\bar{g}$ – сила тяжести вала, $\bar{N}_1, \bar{F}_{mp}^{(1)}$ – нормальная реакция и сила трения в точке контакта деталей (K_1) (Рис. 2а), $\bar{F}^{yn}$ – равнодействующая упругих сил в схвате, $\bar{F}_{ce}^{un}, \bar{F}_{ck}^{un}$ – переносная и Кориолиса силы инерции центра масс вала, $\bar{F}$ – сборочное усилие, развиваемое приводом робота.

Дифференциальное уравнение (2) необходимо представить в проекциях на оси координат системы $0\xi\eta\zeta$. При этом будем учитывать, что вибрационные колебания происходят с малыми по величине амплитудами, то есть углы ψ и ϕ , являются малыми. Следовательно, приближенно можно считать, что:

$$\begin{aligned} \sin\psi &\approx \psi, & \sin\phi &\approx \phi, \\ \cos\psi &\approx 1, & \cos\phi &\approx 1. \end{aligned} \quad (3)$$

В конечном итоге дифференциальные уравнения относительного движения центра масс приведем к виду:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_c = -\frac{c}{m}(\xi_c + z_{c2}\psi) + \xi_c\dot{\psi}^2 - \eta_c\ddot{\psi}\varphi - 2\eta_c\dot{\psi}\dot{\varphi} - \zeta_c\ddot{\psi} + 2\zeta_c\dot{\psi}\dot{\varphi} - 2\dot{\psi}\dot{\zeta}_c - 2\dot{\eta}_c\dot{\psi}\varphi + \frac{F}{m}\psi; \\ \ddot{\eta}_c = -\frac{c}{m}(\eta_c - z_{c2}\varphi) + \xi_c\ddot{\psi}\varphi + \eta_c\dot{\varphi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2\varphi + \zeta_c\ddot{\varphi} + 2\dot{\xi}_c\dot{\psi}\varphi + 2\dot{\zeta}_c\dot{\varphi} - \frac{F}{m}\varphi; \\ \ddot{\zeta}_c = -\frac{c}{m}(\zeta_c - z_{c2}) + \xi_c\ddot{\psi} + \eta_c\dot{\psi}^2\varphi - \eta_c\ddot{\varphi} + \zeta_c\dot{\varphi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2 - 2\dot{\eta}_c\dot{\varphi} + 2\dot{\xi}_c\dot{\psi} - \frac{F}{m}. \end{cases} \quad (4)$$

При получении дифференциального уравнения относительного движения центра масс (4) было учтено, что статические составляющие сил упругости уравновешены силами (в том числе силы тяжести детали), вызвавшими деформацию упругих элементов в схвате в положении статического равновесия.

Дифференциальное уравнение (4) содержит неизвестную координату z_{c2} , которая может быть определена по формуле (Рис. 1а):

$$z_{c2} = (l + h) - Vt, \quad (5)$$

где V – постоянная скорость перемещения вниз третьего звена, несущего схват.

Таким образом, дифференциальные уравнения (4) с учетом (5) определяют относительное движение центра масс вала при контакте сопрягаемых деталей в точке K_1 .

Далее необходимо построить дифференциальные уравнения относительного движения центра масс вала при контакте его торца с образующей втулки.

Следующий этап исследования – дифференциальные уравнения относительного движения центра масс вала при контакте его торца с образующей втулки.

Таким образом, рассмотрим следующий этап сопряжения деталей, при котором устанавливаемая деталь (вал) коснется торцом образующей втулки (Рис. 3).

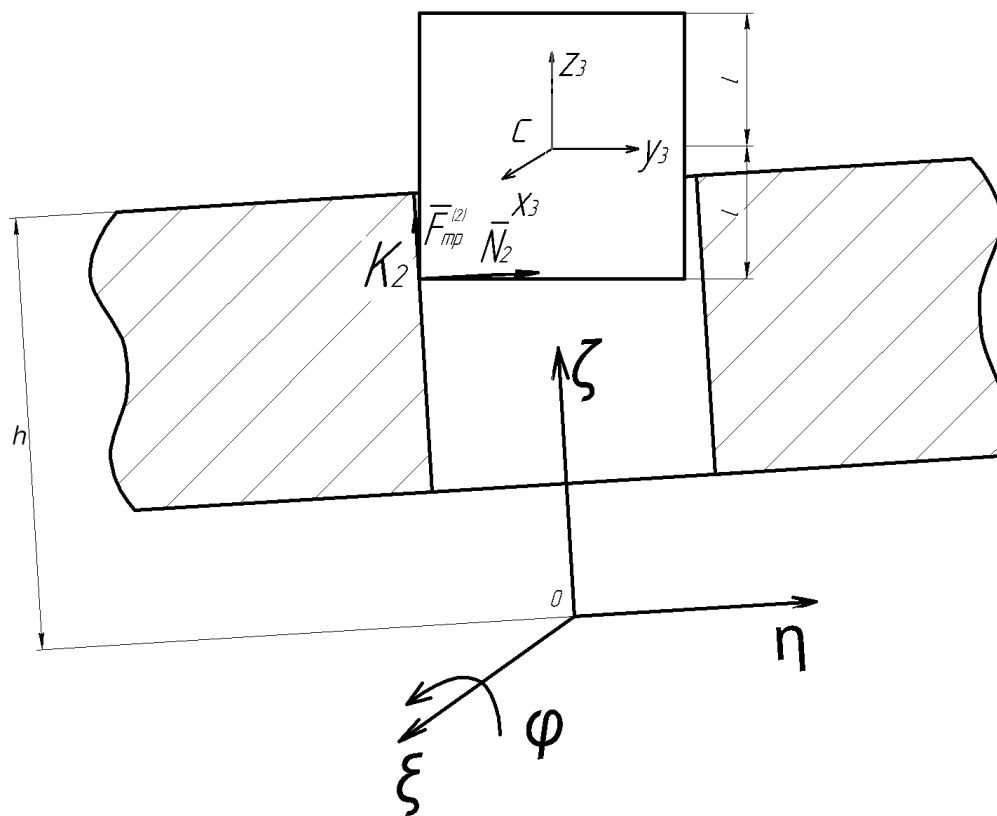


Рис. 3. Расчетная схема одноточечного контакта торца вала и образующей втулки.

При этом дифференциальное уравнение относительного движения центра масс вала будет иметь вид:

$$m\bar{a}_{cr} = m\bar{g} + \bar{N}_2 + \bar{F}_{mp}^{(2)} + \bar{F}^{yn} + \bar{F}_{ce}^{un} + \bar{F}_{ck}^{un} + \bar{F}, \quad (6)$$

где $\bar{a}_{cr}$ – относительное ускорение центра масс, $\bar{N}_2$, $\bar{F}_{mp}^{(2)}$ – нормальная реакция и сила трения, $\bar{F}^{yn}$, $\bar{F}_{ce}^{un}$, $\bar{F}_{ck}^{un}$, $\bar{F}$ – соответственно сила упругости, переносная и Кориолиса силы инерции и сборочное усилие.

Дифференциальное уравнение относительного движения центра масс вала (6) в проекциях на оси системы координат $0\xi\eta\zeta$ в конечном итоге примет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_c = -fN_2 \frac{l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - c(\xi_c + z_{c2}\psi) + \\ + m(\xi_c\dot{\psi}^2 - \eta_c\ddot{\psi}\phi - 2\eta_c\dot{\psi}\dot{\phi} - \zeta_c\ddot{\psi} + 2\zeta_c\dot{\psi}\dot{\phi}\phi) + m(-2\dot{\psi}\dot{\zeta}_c - 2\dot{\eta}_c\dot{\psi}\phi) + F\psi; \\ m\ddot{\eta}_c = N_2 - c(\eta_c - z_{c2}\phi) + m(\xi_c\ddot{\psi}\phi + \eta_c\dot{\phi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2\phi + \zeta_c\ddot{\phi}) + m(2\dot{\xi}_c\dot{\psi}\phi + 2\dot{\zeta}_c\dot{\phi}) - F\phi; \\ m\ddot{\zeta}_c = -fN_2 \frac{r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - c(\zeta_c - z_{c2}) + \\ + m(\xi_c\ddot{\psi} + \eta_c\dot{\psi}^2\phi - \eta_c\ddot{\phi} + \zeta_c\dot{\phi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2) + m(-2\dot{\eta}_c\dot{\phi} + 2\dot{\xi}_c\dot{\psi}) - F. \end{cases} \quad (7)$$

При однотоочечном контакте сопрягаемых деталей одна степень свободы центра масс вала теряется. Следовательно, только два из трех дифференциальных уравнений (7) должны быть независимыми. Для получения этих двух уравнений с учетом условия контакта получим:

$$\eta_c = -(R-r) + l\phi, \quad (8)$$

Второе уравнение системы (7) с учетом (8) позволяет определить нормальную реакцию N_2 , а именно:

$$\frac{N_2}{m} = l\ddot{\phi} + \frac{c}{m}(\eta_c - z_{c2}\phi) - (\xi_c\ddot{\psi}\phi + \eta_c\dot{\phi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2\phi + \zeta_c\ddot{\phi}) - (2\dot{\xi}_c\dot{\psi}\phi + 2\dot{\zeta}_c\dot{\phi}) + \frac{F}{m}\phi. \quad (9)$$

Таким образом, при наличии контакта торца вала с образующей втулки в точке K_2 (Рис. 3) приближенные (с точностью до величин второго порядка малости) дифференциальные уравнения относительного движения центра масс вала на основании (7) с учетом (9) приведены к виду:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_c = -f \frac{N_2}{m} \frac{l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - \frac{c}{m}(\xi_c + z_{c2}\psi) + \xi_c\dot{\psi}^2 - \eta_c\ddot{\psi}\phi - 2\eta_c\dot{\psi}\dot{\phi} - \\ - \zeta_c\ddot{\psi} + 2\zeta_c\dot{\psi}\dot{\phi}\phi - 2\dot{\psi}\dot{\zeta}_c - 2\dot{\eta}_c\dot{\psi}\phi + \frac{F}{m}\psi; \\ \ddot{\zeta}_c = -f \frac{N_2}{m} \frac{r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - \frac{c}{m}(\zeta_c - z_{c2}) + \xi_c\ddot{\psi} + \eta_c\dot{\psi}^2\phi - \eta_c\ddot{\phi} + \zeta_c\dot{\phi}^2 + \\ + \zeta_c\dot{\psi}^2 - 2\dot{\eta}_c\dot{\phi} + 2\dot{\xi}_c\dot{\psi} - \frac{F}{m}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\frac{N_2}{m}$ определяется по (9), а затем изменения координаты η_c со временем по формуле (8). Следует отметить, что параметр z_{c2} определяется соотношением (5).

При нарушении контакта сопрягаемых деталей в точке K_2 нормальная реакция $N_2 = 0$ и $F_{mp}^{(2)} = 0$. При этом дифференциальные уравнения движения относительного центра масс (7) примут вид (4).

Контакт деталей может быть нарушен в тот момент времени, когда нормальная реакция N_2 , определяемая по (9), станет равной нулю. Значение координат центра масс ξ_c, η_c, ζ_c и составляющих скоростей $\dot{\xi}_c, \dot{\eta}_c, \dot{\zeta}_c$ в момент нарушения контакта деталей будут определять начальные условия при интегрировании дифференциальных уравнений (4).

Далее необходимо построить дифференциальные уравнения движения центра масс вала относительно системы координат, жестко связанной с втулкой, в случае контакта сопрягаемых деталей в двух точках.

Следует детально рассмотреть случай, когда контакт сопрягаемых деталей произойдет в двух точках (K_3) и (K_4). При этом на центральную деталь будут действовать две нормальные реакции ($\bar{N}_3, \bar{N}_4$) и две силы трения ($\bar{F}_{mp}^{(3)}, \bar{F}_{mp}^{(4)}$) (Рис. 4).

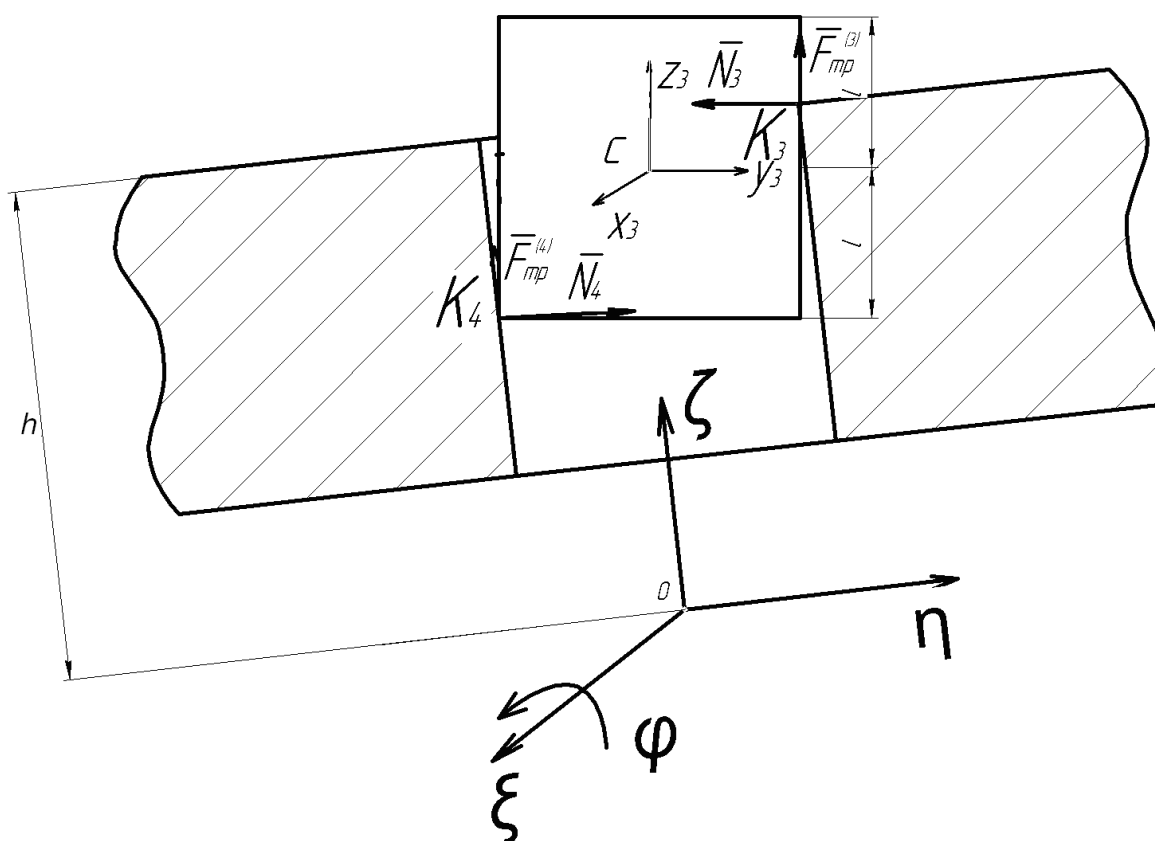


Рис. 4. Расчетная схема двухточечного контакта сопрягаемых поверхностей.

Таким образом, при двухточечном контакте сопрягаемых деталей дифференциальные уравнения движения центра масс вала будут иметь вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_c = N_{3\xi} + N_{4\xi} + F_{mp\xi}^{(3)} + F_{mp\xi}^{(4)} + F_{\xi}^{yn} + F_{ce\xi}^{un} + F_{ck\xi}^{un} + F_{\xi}, \\ m\ddot{\eta}_c = N_{3\eta} + N_{4\eta} + F_{mp\eta}^{(3)} + F_{mp\eta}^{(4)} + F_{\eta}^{yn} + F_{ce\eta}^{un} + F_{ck\eta}^{un} + F_{\eta}, \\ m\ddot{\zeta}_c = N_{3\zeta} + N_{4\zeta} + F_{mp\zeta}^{(3)} + F_{mp\zeta}^{(4)} + F_{\zeta}^{yn} + F_{ce\zeta}^{un} + F_{ck\zeta}^{un} + F_{\zeta}. \end{cases} \quad (11)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения центра масс устанавливаемой детали (11) в конечном итоге примут вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_c = -fN_3\psi - fN_4 \frac{l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - c(\xi_c + z_{c2}\psi) + \\ + m(\xi_c\dot{\psi}^2 - \eta_c\ddot{\psi}\phi - 2\eta_c\dot{\psi}\dot{\phi} - \zeta_c\ddot{\psi} + 2\zeta_c\dot{\psi}\dot{\phi}) + m(-2\dot{\psi}\dot{\xi}_c - 2\dot{\eta}_c\dot{\psi}\phi) + F\psi, \\ m\ddot{\eta}_c = -N_3 + N_4 + fN_3\phi - c(\eta_c - z_{c2}\phi) + m(\xi_c\ddot{\psi}\phi + \eta_c\dot{\phi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2\phi + \zeta_c\ddot{\phi}) + \\ + m(2\dot{\xi}_c\dot{\psi}\phi + 2\dot{\zeta}_c\dot{\phi}) - F\phi; \\ m\ddot{\zeta}_c = N_3\phi + fN_3 - fN_4 \frac{r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - c(\zeta_c - z_{c2}) + \\ + m(\xi_c\ddot{\psi} + \eta_c\dot{\psi}^2\phi - \eta_c\ddot{\phi} + \zeta_c\dot{\phi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2) + m(-2\dot{\eta}_c\dot{\phi} + 2\dot{\xi}_c\dot{\psi}) - F. \end{cases} \quad (12)$$

В результате получим систему двух линейных алгебраических уравнений, позволяющих определить нормальную реакцию N_3 и N_4 . Решив эту систему уравнений, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{N_4}{m} &= \frac{1}{[(\phi + f) - f \frac{r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}}] (ml\ddot{\phi} + \frac{c}{m}(\eta_c - z_{c2}\phi) - \xi_c\ddot{\psi}\phi - \eta_c\dot{\phi}^2 - \\ &- \zeta_c\dot{\psi}^2\phi - \zeta_c\ddot{\phi} - 2\dot{\xi}_c\dot{\psi}\phi - 2\dot{\zeta}_c\dot{\phi} + \frac{F}{m}\phi)(\phi + f) + r\ddot{\phi} + \frac{c}{m}(\zeta_c - z_{c2}) - \xi_c\ddot{\psi} - \eta_c\dot{\psi}^2\phi + \\ &+ \eta_c\ddot{\phi} - \zeta_c\dot{\psi}^2 + 2\dot{\eta}_c\dot{\phi} - 2\dot{\xi}_c\dot{\psi} + \frac{F}{m}), \\ \frac{N_3}{m} &= \frac{N_4}{m} - l\ddot{\phi} - \frac{c}{m}(\eta_c - z_{c2}\phi) + \xi_c\ddot{\psi}\phi + \eta_c\dot{\phi}^2 + \zeta_c\dot{\psi}^2\phi + \zeta_c\ddot{\phi} + 2\dot{\xi}_c\dot{\psi}\phi + 2\dot{\zeta}_c\dot{\phi} - \frac{F}{m}\phi. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае контакта сопрягаемых деталей в двух точках, задача свелась к решению одного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_c &= -\frac{N_3}{m} f\psi - f \frac{N_4}{m} \frac{l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c}{\sqrt{(l\dot{\psi} + \dot{\xi}_c)^2 + (r\dot{\phi} + \dot{\zeta}_c)^2}} - \frac{c}{m}(\xi_c + z_{c2}\psi) + \xi_c\dot{\psi}^2 - \eta_c\ddot{\psi}\phi - 2\eta_c\dot{\psi}\dot{\phi} - \\ &- \zeta_c\ddot{\psi} + 2\zeta_c\dot{\psi}\dot{\phi} - 2\dot{\psi}\dot{\xi}_c - 2\dot{\eta}_c\dot{\psi}\phi + \frac{F}{m}\psi, \end{aligned} \quad (14)$$

При этом координаты центра масс вала η_c и ζ_c определяются по формулам:

$$\begin{cases} \eta_c = -(R - r) + l\phi, \\ \zeta_c = h + l + r\phi - Vt. \end{cases} \quad (15)$$

В результате подстановки соотношений (1) в (15) получим уравнения, характеризующие законы изменения со временем координат η_c и ζ_c центра масс устанавливаемой детали:

$$\begin{aligned} \eta_c &= -(R - r) + lA\cos kt, \\ \zeta_c &= h + l + rA\cos kt - Vt. \end{aligned} \quad (16)$$

На основании (16) можно определить соответствующие составляющие скорости центра масс вала относительно втулки, а именно:

$$\begin{aligned} V_{c\eta} &= \dot{\eta}_c = -Alk \sin kt, \\ V_{c\zeta} &= \dot{\zeta}_c = -(Ark \sin kt + V). \end{aligned} \quad (17)$$

Из сравнения и следует, что одновременно эти составляющие скорости не могут быть равными нулю. Следовательно, явление заклинивания при рассматриваемом методе сборки, исключено.

Дальнейшее исследование поставленной задачи связано с реализацией построенных математических моделей на компьютере и проведением численного анализа.

Литература

1. Божкова Л.В., Вартанов М.В., Чуканова О.В., Кольгугин Е.И. Метод роботизированной сборки с использованием вибрационных колебаний// Сборка в машиностроении, приборостроении, 2006, №9, с. 19-24.

2. Божкова Л.В., Вартанов М.В., Бакена Мбуа Ж. К. Совершенствование технологии сборки цилиндрических продольных деталей с применением вибрационных колебаний и пассивной адаптации// Сборка в машиностроении, приборостроении, 2010, №7, с.26-32

3. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М., Высшая школа, 1983. – 575с.

4. Коловский М.З., Слоуц А.В. Основы динамики промышленных роботов. – М., Наука 1988. – 240с.