

**УДК 621.822**

## **СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТОЧНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ**

Тимур Олегович Пустынников

*Студент 4 курса*

*кафедра «Технология машиностроения»*

*Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)*

*Научный руководитель: С.Л. Петухов*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Технология машиностроения»*

*Аннотация: В статье рассматриваются математические методы прогнозирования показателей технологического процесса обработки. Изложены теоретические предпосылки метода, методика проведения исследования и выделен ряд теоретических законов распределения, которые с достаточной достоверностью аппроксимируют эмпирические распределения параметров точности механической обработки деталей.*

*Annotation. In article it is considered: mathematical methods of forecasting indicators of technological processing. It is recited theoretical basis of the method, the procedure of research and a number of the theoretical distribution laws which reliably approximate empirical distributions of parameters of accuracy machining details.*

*Ключевые слова: технологический процесс, точность, надежность, прогнозирование точности, управление качеством, законы распределения.*

*Keywords: technological processing, accuracy, reliability, forecasting accuracy, quality control, distribution laws.*

### **Теоретические предпосылки метода**

Технологические процессы в машиностроении относятся к слабодетерминированным, причем, чем ближе заданная точность изделия к пределу точностных возможностей ТС, тем процесс менее детерминирован (определен и управляем), а показатели таких процессов технологические и экономические изучаются на основе вероятностных (стохастических) закономерностей. Для получения надежных прогнозов и корректной информации на основе имеющейся статистики следует использовать математические законы распределения случайных величин, обладающие максимальной степенью корректности к фактическим распределениям показателей технологического процесса.

Большинство авторов делают необоснованные допущения о нормальности распределения параметров точности, что объясняется удобством их применения и наличием для них табулированных функций Лапласа. Однако при этом приходится согласиться с допущением об отсутствии влияния неслучайных возмущающих факторов, что для технологических процессов принципиально неверно. Нет таких технологических процессов, которые не включали бы системные возмущающие факторы (износ инструмента, узлов станка, характеристики заготовок). В силу этого получаемые результаты приводят к неверным выводам.

Учитывая это, было бы весьма продуктивно получить набор таких аппроксимирующих математических зависимостей, совокупность которых позволяла бы в большинстве случаев

корректно (адекватно) описывать фактические распределения и давать прогноз надежности достижения заданных качественных параметров изделия в конкретных условиях производства. Не имея такого аппарата, мы не можем эффективно управлять затратным механизмом, обеспечивающим требуемый уровень качества.

Рассмотрим в качестве параметра качества точностные характеристики детали, как наиболее удобные в расчетах.

Надежность достижения точностных параметров на операции определяем как разность между 100% и вероятностным процентом брака. Прогнозирование будем производить на базе статистического анализа точности обработки, на основе данных репрезентативных выборок, что дает возможность рассматривать их как эмпирический аналог генеральной совокупности. Достоверность результатов статистического анализа во многом определяется точностью аппроксимации полигона распределения измеренных размеров, выбранной «теоретической» кривой, т.е. аналитическим законом распределения.

В качестве таких теоретических кривых в машиностроении принято использовать кривые: нормального распределения – для выравнивания эмпирических кривых распределения линейных размеров деталей, а также распределения размахов – для существенно положительных величин. Предпосылкой такого выбора часто является теорема Ляпунова, согласно которой, если случайная (контролируемая) величина может быть представлена в виде суммы ряда случайных, взаимно независимых составляющих, число которых стремится к бесконечности, то, независимо от закона распределения каждой из них и при отсутствии среди них доминирующей, распределение контролируемой величины может описываться законом нормального распределения.

Авторами был проведен анализ точности большого числа операций механической обработки деталей машин в условиях действующего производства. Эмпирические кривые распределения размеров ряда деталей представлены на рисунке 1.

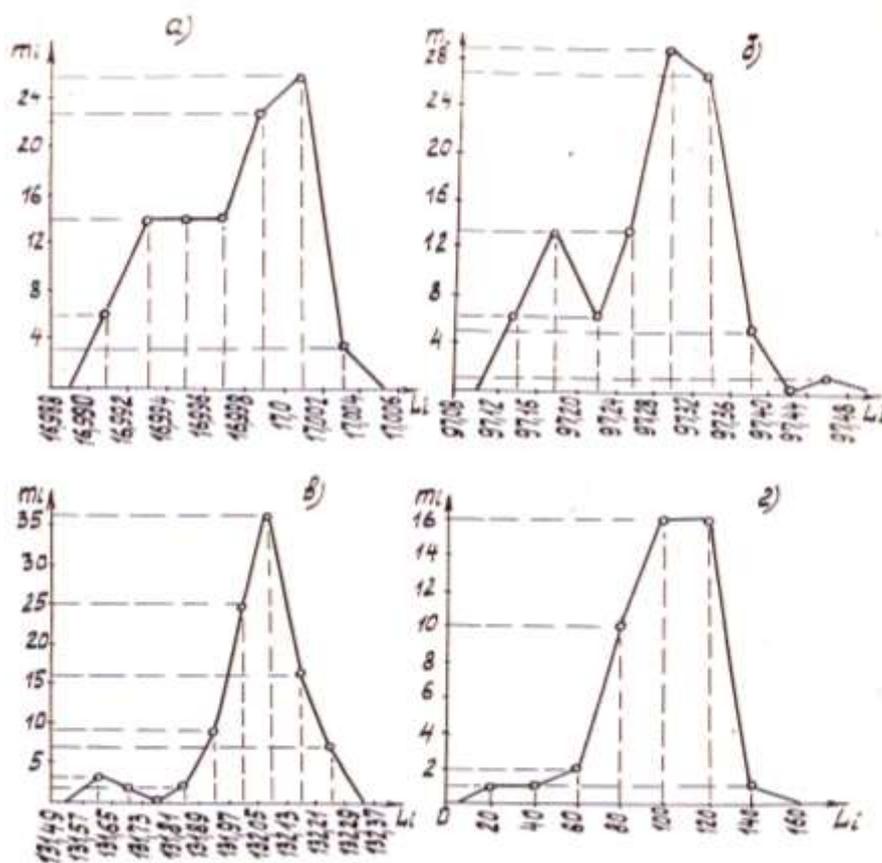


Рисунок 1. Примеры эмпирических кривых распределения параметров составляющих звеньев СРЦ роторного агрегата

а - диаметр шейки вала ротора под подшипник с/пр.; б – диаметр отверстия статора; в- наружный диаметр статора; г- радиальное биение отверстия под статор относительно отверстия под подшипник в крышке с/пр.

Однако принятие законов Гаусса и распределения размахов как единственных и универсальных, часто вступает в противоречие с фактическим материалом, что отмечается рядом авторов.

Указанные законы следует рассматривать лишь как одни из многих типов распределений с относительно большим удобством практической применимости. На практике, разумеется, мы не можем априорно утверждать, что все возмущающие факторы одинаково значимы: число их стремится к бесконечности, а их значения – случайные величины.

Очевидно, что аппроксимация полученных экспериментальных кривых упомянутыми теоретическими законами представляется необоснованной, учитывая их форму [1,2].

Было бы логично проводить выравнивание эмпирических кривых распределения гаммой специально подобранных функций, и в каждом конкретном случае выбирать ту, которая позволяет получить лучшую точность аппроксимации. Далее рассчитывать для этой кривой коэффициенты среднего квадратичного отклонения ( $\lambda$ ) и относительной асимметрии ( $\alpha$ ), которые входят в формулы, используемые при расчете технологических размерных цепей, и тем самым существенно повысить достоверность прогнозирования точности функционального показателя изделия. Однако гамму таких функций можно сформировать лишь на основе обобщения экспериментального материала.

### Методика проведения исследования

Для подтверждения эффективности метода и для сравнения точности аппроксимации эмпирических кривых распределения общепринятыми и предлагаемыми теоретическими законами были замерены значения 10 точностных параметров, которые являются наиболее значимыми составляющими звеньями размерной цепи автомобильного генератора. Объем каждой случайной выборки  $N$  удовлетворял условиям репрезентативности.

Были замерены следующие параметры:

1. Диаметр шейки вала ротора под подшипник с/пр. – звено  $A_1$  ;
2. Диаметр отверстия под подшипник в крышке с/пр. – звено  $B_1$  ;
3. Диаметр отверстия под статор в крышке с/пр. - звено  $B_2$  ;
4. Величина радиального биения отверстий под статор относительно отверстия под подшипник в крышке с/пр. - звено  $B_3$  ;
5. Диаметр отверстия статора – звено  $\Gamma_1$  ;
6. Наружный диаметр статора – звено  $\Gamma_2$  ;
7. Наружный диаметр ротора – звено  $A_5$  ;
8. Величина полного радиального биения наружной цилиндрической поверхности ротора относительно шеек вала ротора под подшипники - звено  $A_6$  ;
9. Изменение  $A_\Delta$  за счет отклонения от перпендикулярности оси подшипника, собранного с крышкой с/пр. относительно опорного пояса под статор – звено  $A_8$  ;
10. Величина отклонения от перпендикулярности оси отверстия в статоре его торцу - звено  $A_{10}$  .

Результаты замеров обрабатывались по представленной ниже разработанной машинной программе. Программа написана на языке PL/1. машинная обработка эмпирических данных позволила исключить группирование данных по интервалам, что применяется при ручном счете и может привести к искажению истинного вида эмпирической кривой распределения, который существенно зависит от выбранной величины интервала. Учитывался и тот факт, что технологические процессы практически никогда не обеспечивают «чисто» нормальное распределение параметров обработанных деталей в силу своей специфики.

Точность аппроксимации эмпирической кривой предлагаемыми теоретическими законами оценивалась по наименьшей сумме квадратов отклонений ординат точек эмпирической кривой от теоретической кривой. При анализе эмпирических кривых распределения каждая из них рассматривалась следующим образом:

- а) вся эмпирическая кривая;
- б) часть эмпирической кривой до верхней границы допуска;
- в) часть эмпирической кривой за нижней границы допуска.

Таким образом, анализировалась точность аппроксимации как всей эмпирической кривой распределения, так и ее участков, которые характеризуются количеством деталей, не удовлетворяющих техническим условиям. Для каждого из трех случаев определялась вероятность возникновения брака в процентах, т.е. надежность операции.

Предпочтительной теоретической кривой считали ту, сумма квадратов отклонений у которой от эмпирической кривой была наименьшей по сравнению с другими.

### Рекомендуемые теоретические законы распределения

В результате теоретических поисков и машинного анализа большого объема экспериментальных данных была выделена гамма теоретических законов распределения, которые с достаточной достоверностью аппроксимируют полученные эмпирические кривые, а именно:

1. Система функций плотности Пирсона.
2. Разложения, производные от нормального распределения.
3. Закон распределения размахов.
4. Распределения, основанные на разложении в ряд Эджворта.
5. Распределения, основанные на разложении в ряд Грама-Шарлье.
6. Закон Вейбула.

Что касается законов нормального распределения и распределения размахов, они были приняты во внимание, учитывая их широкое использование в практике статистических исследований. Кроме того, они были необходимы как критерий сравнения степени адекватности. Указанные законы двухпараметрические и в основном определяются первыми двумя моментами распределения: средним арифметическим и дисперсией  $\sigma^2$ . При этом не учитываются такие важные характеристики распределения, как асимметрия и эксцесс. Этим объясняется тот факт, что эти законы, как правило, не позволяют получить удовлетворительный уровень аппроксимации эмпирической кривой распределения.

Распределением, параметры которого определяются первыми четырьмя моментами (т.е. дополнительно учитываются асимметрия и эксцесс), является решение дифференциального уравнения, которое определяет систему функций плотности Пирсона. Их использование в качестве теоретического закона позволяет значительно повысить точность аппроксимации эмпирической кривой.

Однако определение типа решения дифференциального уравнения и построение различных теоретических кривых является сложной, трудоемкой задачей, для решения которой была разработана нестандартная машинная программа (ее описание приведено в приложении).

На практике часто встречаются кривые распределения, которые визуально близки к нормальному распределению. В этих случаях естественно аппроксимировать такие кривые функциями вида  $F(x)=\Phi(x) + R(x)$ , где  $\Phi(x)$  – функция нормального распределения, и попытаться найти подходящее решение для остаточного члена  $R(x)$ . С точки зрения инженерной практики наиболее приемлемыми являются два типа разложения:

- а) разложение по ортогональным полиномам;
- б) асимптотическое разложение.

Члены указанных разложений  $F(x)$  содержат моменты  $\mu_3, \mu_4, \dots, \mu_{v+2}$ , т.е. учитываются асимметрия и эксцесс.

По сравнению с системой функций плотности Пирсона, определяемой дифференциальным уравнением, решение которого позволяют получить более точную аппроксимацию, использование разложений, основанных на нормальном распределении, дает возможность значительно сократить объем вычислительных работ с достаточной для практических задач точностью.

Так как закон распределения размахов является односторонним, т.е. позволяет аппроксимировать только правую ветвь эмпирической кривой распределения, он применяется только для аппроксимации кривых отклонений существенно положительных величин.

Остановимся подробнее на каждой теоретической зависимости.

### Система функций плотности Пирсона

Система функций плотности Пирсона представляет собой широко разветвленную систему, которая рассматривается, в основном, в специальной литературе и определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{x - a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}, \quad \text{где } a, b_0, b_1, b_2 \text{ – постоянные.} \quad (1)$$

Постоянные для уравнения (1) могут быть выражены через четыре первые момента распределения, если эти моменты конечны. Учитывая, что в большинстве практических ситуаций неизвестны первые четыре момента распределения, будем оценивать их исключительно по результатам статистического анализа выборки, используя величины выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочной асимметрии и выборочного эксцесса, а следовательно, и выборочные моменты рассматриваемого распределения, которые определяются следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \mu_2 = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3; \quad \mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4;$$

где  $n$  – число деталей в выборке;

$i$  – порядковый номер детали  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$\bar{x}$  – среднее арифметическое распределение;

$\sigma$  – среднее квадратическое отклонение.

Можно показать, что, если начало координат выбрано в точке, соответствующей среднему, то значение постоянных дифференциального уравнения задаются следующими выражениями:

$$a = -\sqrt{\mu_2} (C_2 + 3) \sqrt{C_1} / 2(5C_2 - 6C_1 - 9);$$

$$b_0 = -\mu(4C_2 - 3C_1) / 2(5C_2 - 6C_1 - 9); \quad (2)$$

$$b_1 = a$$

$$b_2 = -(2C_2 - 3C_1 - 6) / 2(5C_2 - 6C_1 - 9);$$

Величины  $C_1$  и  $C_2$  представляют собой характеристики асимметрии и эксцесса рассматриваемой выборки и, в свою очередь, задаются соотношениями:

$$\sqrt{C_1} = \mu_3 / \mu_2^{3/2}; \quad C_2 = \mu_4 / \mu_2^2;$$

Большое разнообразие возможных типов кривых распределения плотности определяется характером корней квадратного трехчлена знаменателя (1):  $b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

Предварительный анализ исходных данных показал, что во всех рассмотренных случаях имеют место два типа начальных условий и соответствующие им решения уравнения Пирсона:

$$1) b_2 = 0; D > 0; D = \sqrt{4b_2b_0 - b_1^2};$$

где  $D$  – дискриминант квадратного трехчлена.,

$$y = A \left| x - x_1 \right|^{1/b_2} \left| x - x_2 \right|^{1/b_2} \quad (3)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного трехчлена.

$$2) b_2 \neq 0; D < 0;$$

$$y = A \left| b_0 + b_1x + b_2x^2 \right|^{1/2b_2} e^{-\left(a + \frac{b_1}{2b_2}\right) \frac{2}{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}} \arctg \frac{2b_2x + b_1}{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}}} \quad (4)$$

### Разложения, основанные на нормальном распределении

Рассмотрим случайную величину  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ , которая является суммой  $n$  независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение непрерывного типа. В случае выполнения условий центральной предельной теоремы Ляпунова, функция распределения нормированной случайной величины  $\frac{\xi_1 - m}{\sigma}$ , которую обозначим  $F(x)$ , при больших  $n$ , приближенно будет соответствовать нормальному распределению –  $\Phi(x)$ , т.е.

$$F(x) \approx \Phi(x) \quad (5)$$

Тогда плотность вероятности  $f(x) \approx F'(x)$  будет приближенно равна плотности нормального распределения:

$$\varphi(x) \approx \Phi'(x) \quad (6)$$

Учитывая приближенный характер равенств (5) и (6), можно записать:

$$F(x) = \Phi(x) + R(x);$$

$$f(x) = \varphi(x) + r(x);$$

Остаточные члены  $R(x)$  и  $r(x)$  будем рассматривать как оценки степени приближения к функциям  $F(x)$  и  $f(x)$ . Представим эти остаточные члены в форме некоторого разложения в ряды, тогда сможем найти более точные приближения рассматриваемого распределения и его функции плотности к теоретическому. Типы разложения остаточных членов в ряды могут быть различны. Например, разложение по ортогональным полиномам известно под названием ряда Грамма-Шарлье типа А, который для рассматриваемого разложения записывается следующим образом:

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{C_3}{3!} \Phi^{(3)}(x) + \frac{C_4}{4!} \Phi^{(4)}(x) + \frac{C_5}{5!} \Phi^{(5)}(x) + \dots \quad (7)$$

Предполагая возможность почленного интегрирования ряда, запишем функцию плотности рассматриваемого распределения:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{C_3}{3!} \varphi^{(3)}(x) + \frac{C_4}{4!} \varphi^{(4)}(x) + \frac{C_5}{5!} \varphi^{(5)}(x) + \dots \quad (8)$$

Значения коэффициентов  $C_3, C_4, C_5$  и т.д. определяются из выражения:

$$C_\nu = (-1)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu(x) f(x) dx; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

где  $H_\nu(x)$  – полином Эрмита степени  $\nu$ .

Учитывая, что полиномы Эрмита могут быть выражены через моменты рассматриваемой случайной величины  $\xi$  коэффициенты  $C_3, C_4, C_5$  можно представить в следующем виде, удобном для практического счета:

$$C_3 = -\frac{\mu_3}{\sigma^3}; \quad C_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3; \quad C_5 = -\frac{\mu_5}{\sigma^5} + 10 \frac{\mu_3}{\sigma^3};$$

Теперь интегральную функцию и функцию плотности рассматриваемого распределения можно записать следующим образом:

$$F(x) = \Phi(x) - \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \Phi^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} \left( \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \Phi^{(4)}(x) + \frac{1}{5!} \left( -\frac{\mu_5}{\sigma^5} + 10 \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right) \Phi^{(5)}(x) + \dots; \quad (10)$$

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} \left( \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi^{(4)}(x) + \frac{1}{5!} \left( -\frac{\mu_5}{\sigma^5} + 10 \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right) \varphi^{(5)}(x) + \dots; \quad (11)$$

Если учесть, что величины  $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$  и  $\left( \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right)$  представляют собой соответственно асимметрию А и эксцесс Е распределения случайной величины  $x$ , то получим следующие

приближенные выражения для интегральной функции и функции плотности рассматриваемого

$$\text{распределения: } F(x) = \Phi(x) - \frac{1}{3!} A \Phi^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} E \Phi^{(4)}(x) + \frac{1}{5!} \left( -\frac{\mu_5}{\sigma^5} + 10A \right) A^{(5)}(x); \quad (12)$$

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3!} A \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} E \varphi^{(4)}(x) + \frac{1}{5!} \left( -\frac{\mu_5}{\sigma^5} + 10A \right) \varphi^{(5)}(x); \quad (13)$$

Теперь рассмотрим асимптотическое разложение, основанное на нормальном распределении. Одним из таких разложений является ряд Эджворта:

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} \left( \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!} \left( \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right)^2 \varphi^{(6)}(x); \quad (14)$$

Вводя характеристики асимметрии и эксцесса и ограничиваясь членами порядка малости  $N^{-1}$ , запишем:

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3!} A \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} E \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!} A^2 \varphi^{(6)}(x) + \dots; \quad (15)$$

Чтобы получить соответствующее разложение для функции распределения  $F(x)$ , нужно только заменить  $\varphi(x)$  на  $\Phi(x)$ .

Для численных подсчетов  $\varphi^{(v)}(x)$  необходимы таблицы, которые имеются в справочной литературе.

### Разложения, основанные на уравнении Вейбула

Функция распределения и плотности Вейбула задаются выражениями:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t^\alpha}$$

$$P(t) = \lambda_0 \cdot \alpha \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda_0 t^\alpha}$$

$$t \geq 0; \lambda_0 > 0; \alpha > 0.$$

Экспоненциальное распределение – частный случай, при  $\lambda = 1$ .

Начальный момент времени распределения:

$$m_k = \lambda_0^{-\frac{k}{\alpha}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right).$$

Для выборки значений случайной величины  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  подбираются параметры плотности Вейбула так, чтобы первые два ее центральных момента  $m_1$  и  $m_2$  совпали с соответствующими выборочными моментами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$\begin{cases} m_1 = \mu_1 = \lambda_0^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}); \\ m_2 = \mu_2 = \lambda_0^{-\frac{2}{\alpha}} \Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}); \end{cases} \quad (16)$$

Где  $\alpha$  и  $\lambda_0$  - неизвестные

Решение системы сводится к решению уравнения:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1^2} \sqrt{\pi} = 2^{2\nu} \cdot \frac{\Gamma(V + 0,5)}{\Gamma(V + 1)}; \quad (17)$$

где  $\Gamma$  - гамма функция Эйлера.

$$\alpha = \frac{1}{V}; \quad \lambda_0 = \left( \frac{m_1}{\Gamma(V + 1)} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}; \quad \Gamma_{(z)} = \int_0^{\infty} x^{z-1} \cdot l^{-x} \cdot dx; \quad (18)$$

В основу алгоритма расчета параметров  $\alpha$  и  $\lambda_0$  положено утверждение о том, что функция

монотонно возрастающая. Алгоритм построен следующим образом: решается уравнение (17), затем по формулам (18) вычисляются  $\alpha$  и  $\lambda_0$ . Для прогнозирования надежности достижения заданного точностного показателя был разработан пакет машинных программ [ 3] RASPR.

### Выводы

1. Теоретически разработан и экспериментально исследован метод прогнозирования надежности достижения заданного показателя точности процесса обработки на базе использования выявленных математических законов распределения, что позволило в целом существенно повысить достоверность прогноза.
2. Разработан алгоритм программы для реализации метода прогнозирования надежности достижения заданного показателя точности процесса обработки.
3. Предложена оценка согласия эмпирического распределения и теоретического, удобная для практического применения.

### Литература

1. Бухтеева И.В., Аббясов В.М., Елхов П.Е. Предварительный выбор и оптимизация надежности автоматического сборочного оборудования. Известия МГТУ «МАМИ» №2(6), 2008 г.
2. Бухтеева И.В., Аббясов В.М., Елхов П.Е. Направленный выбор компоновки гибкой автоматизированной линии сборки валов КП. Известия МГТУ «МАМИ» №1(15), 2013 г.
3. Петухов С.Л. "Повышение точности параметров агрегатов путем совершенствования способов достижения надежности технологических процессов". Дис. к.т.н. М. МАМИ 1985 г.