УДК 621.77.07

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛАСТОМЕРОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОГО ЛИСТА ЭЛАСТИЧНЫМ РАБОЧИМ ИНСТРУМЕНТОМ

Антон Аркадьевич Горбулинский

Студент 6 курса
кафедра «Оборудование и технологии прокатки»
Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Научный руководитель: И.Е.Семенов
доктор тех. наук, профессор кафедры «Оборудование и технологии прокатки»

В последнее время использование полимеров - эластомеров в качестве рабочего инструмента особенно актуально. Связано это с ростом таких производственных сфер, как строительство, авиастроение, машиностроение. Именно они в последние годы наиболее заинтересованы в получении качественного тонколистового материала, обладающего различным рельефом и сравнительно недорогой ценой. Перспективным направлением в обработке металлов давлением следует считать формовку эластичными средами, широко применяемую прежде всего в авиастроении, но распространяющуюся в последнее время очень быстро и в другие области.

Для обеспечения выпуска качественных изделий и расширения технологических возможностей процесса формообразования деталей из листа эластичными средами необходимо надежное прогнозирование поведения материала в ходе его обработки. В последнее время требования к точной оценке механических свойств материала существенно повысились, в связи с внедрением в производство компьютерного моделирования и проектирования технологических операций.

Рассмотрим основные теоретические предпосылки [1,2].

Связь между напряжениями и деформациями или выражение для упругого потенциала было получено Муни [1], который, не делая никаких допущений относительно природы деформации и основываясь на предположении о линейной зависимости между напряжением и деформацией при простом сдвиге для изотропного несжимаемого материала, получил выражение для упругого потенциала:

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right), \qquad (1)$$

где C_1 и C_2 - уточняющие коэффициенты, описывающие зависимость напряжение–деформация; $\lambda=h/h_0$ - степень деформации; h_0 - высота недеформированного образца; h - высота деформированного образца. Выражение (1) обычно называют потенциалом Муни - Ривлина.

Чтобы добиться совпадения с экспериментальными данными, Ривлиным было предложено выражение для упругого потенциала в форме суммы, число членов которой тем больше, чем точнее нужно описать зависимость напряжение–деформация. Потенциал Ривлина также удовлетворяет требованию симметрии относительно главных деформаций λ_1, λ_2 и λ_3, что определено изотропностью недеформированного материала. Поэтому потенциал содержит только четные функции этих величин.

Простейшие их комбинации, удовлетворяющие этим требованиям, то есть инварианты тензора деформации, Ривлин записал в виде:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \; ; \qquad (2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2; \qquad (3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \qquad (4)$$

Для любой схемы деформирования, считая материал абсолютно несжимаемым, подразумеваем то, что его третий главный инвариант I_3 соответствует равенству:

$$\prod_{i=1}^{3} \lambda_i^2 = 1 \qquad (5)$$

В самом общем виде потенциал Ривлина можно записать так:

$$W = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{lm} \, (I_1 - 3)^l (I_2 - 3)^m \qquad (6)$$

Для получения адекватных результатов моделирования тел из гиперупругих материалов необходимо точно определить константы Муни-Ривлина для исследуемого материала.

Для этого могут быть использованы результаты простых испытаний (состоящие из шести деформированных состояний).

Шесть различных деформированных состояний проиллюстрированы на рис. .

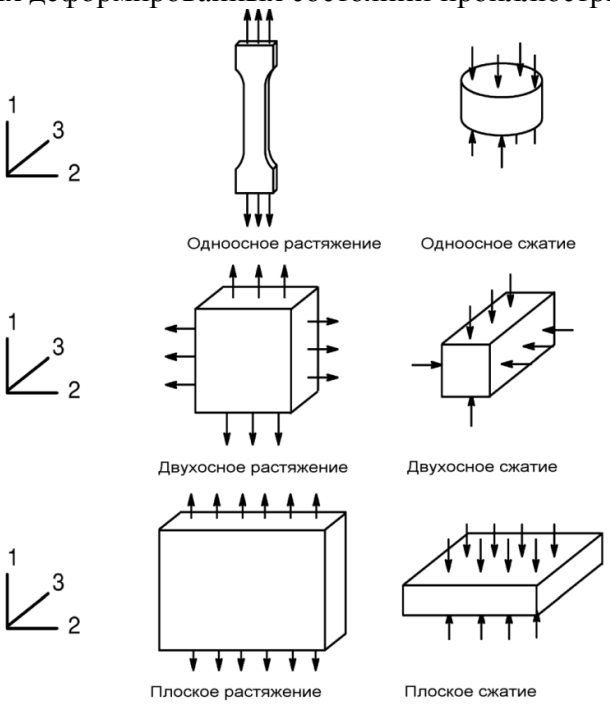


Рис. 1. Простые деформированные состояния образцов.

Напряжения Коши могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1} C_{ij} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2} C_{ij}^{-1} \qquad (7)$$

где: p – давление, C_{ij} – главные инварианты.

При одноосном растяжении, как показано на рис. , образец из гиперупругого материала нагружается вдоль своей оси. Для такого деформированного состояния главные степени деформации в направлении перпендикулярном оси образца будут одинаковы. В соответствии с вышесказанным и уравнением несжимаемости, получим

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2} \qquad (8)$$

Для одноосного растяжения первый и второй инварианты деформаций преобразуются к виду:

$$I_1 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1} \qquad (9)$$

$$I_2 = 2\lambda_1 + \lambda_1^{-2} \qquad (10)$$

Подставляя значение главной степени деформации при одноосном растяжении в уравнение напряжений Коши (), мы получим следующие напряжения в 1 и 2 направлениях:

$$\sigma_{11} = -p + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\lambda_1^2 - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\lambda_1^{-2} \qquad (11)$$

$$\sigma_{22} = -p + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\lambda_1^{-1} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\lambda_1 \qquad (12)$$

Вычитая уравнение (12) из уравнения (), мы получим главное истинное напряжение для одноосного растяжения:

$$\sigma_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}\right)\left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^{-1}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right] \qquad (13)$$

Константы Муни-Ривлина для гиперупругого материала могут быть определены путем минимизации среднеквадратичного отклонения между диаграммой напряжения-деформации, полученной экспериментально и определенной по уравнению (). Суммарное квадратичное отклонение определяется по формуле:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i - \tilde{\sigma}_i(a_{ij})\right)^2 \qquad (14)$$

где: σ_i – экспериментальное значение напряжения, $\tilde{\sigma}_i(a_{ij})$ – значение напряжений Коши (функция констант Муни-Ривлина), n – количество точек экспериментальных данных.

В случае двухпараметрической модели Муни-Ривлина величина суммарного квадратичного отклонения так же будет являться функцией двух переменных – констант Муни-Ривлина. Значение этих переменных в точке локального минимума и являются искомыми величинами, поскольку именно при этих значениях отклонение кривой напряжение-деформация, полученной по уравнению Муни-Ривлина, от экспериментальной кривой будет минимальным.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E^2(C_1, C_2)}{\partial C_1} = 0, \\ \dfrac{\partial E^2(C_1, C_2)}{\partial C_2} = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Система уравнений (является необходимым условием существования локального экстремума функции двух переменных.

Частные производные упругого потенциала по первому и второму главному инвариантам равны соответственно:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_2 \qquad (17)$$

Переписав (14) с учетом (13) , (16) и (17), получим:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i - 2\left({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1}\right) \left[C_1 + {\lambda_1}^{-1} C_2\right]\right)^2 \qquad (18)$$

Вычислив частные производные среднеквадратичного отклонения по коэффициентам Муни-Ривлина в соответствии с (15), получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial E^2}{\partial C_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(-4\sigma_i({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1}) + 8C_1({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1})^2 + 8C_2{\lambda_1}^{-1}({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1})^2\right) = 0 \\ \frac{\partial E^2}{\partial C_2} = \sum_{i=1}^{n} \left(-4\sigma_i{\lambda_1}^{-1}({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1}) + 8C_1{\lambda_1}^{-1}({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1})^2 + 8C_2{\lambda_1}^{-2}({\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^{-1})^2\right) = 0 \end{cases}$$

(19)

Решая систему уравнений (19) относительно C_1 и C_2, приходим к формулам для определения констант Муни-Ривлина:

$$C_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})}{2\sum_{i=1}^{n} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2} - C_{01} \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} \cdot ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2} \qquad (20)$$

$$C_{01} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \lambda_i^{-1} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})}{2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-2} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-2} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})}{2\sum_{i=1}^{n} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2}}{1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-2} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} ({\lambda_i}^2 - \lambda_i^{-1})^2}} \qquad (21)$$

Здесь λ_i – главная степень деформации в i-ом направлении.

Для вычисления по полученным формулам значений коэффициентов Муни-Ривлина необходимо располагать экспериментальными данными.

На этапе экспериментальных исследований нагружали цилиндрический образец по схеме одноосного сжатия и призматический образец, который был помещен в специальный контейнер, для реализации плоско-деформированного состояния. Результаты нагружения цилиндрического образца будем использовать для вычисления коэффициентов Муни-Ривлина, результаты нагружения призматического образца – для дополнительной проверки правильности их определения. Исследовали образцы из полиуретана марки СКУ-7Л.

Испытания образцов проводились на испытательной машине INSTRON модели 600DX-F1-G1. На рис. 2 показан цилиндрический образец, расположенный в испытательной машине перед нагружением.

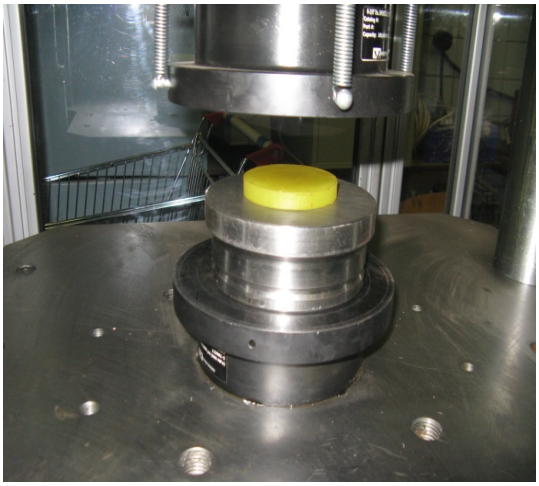


Рис. 2. Осадка цилиндрического образца.

График зависимости силы осадки от ее величины приведен на рис.3.

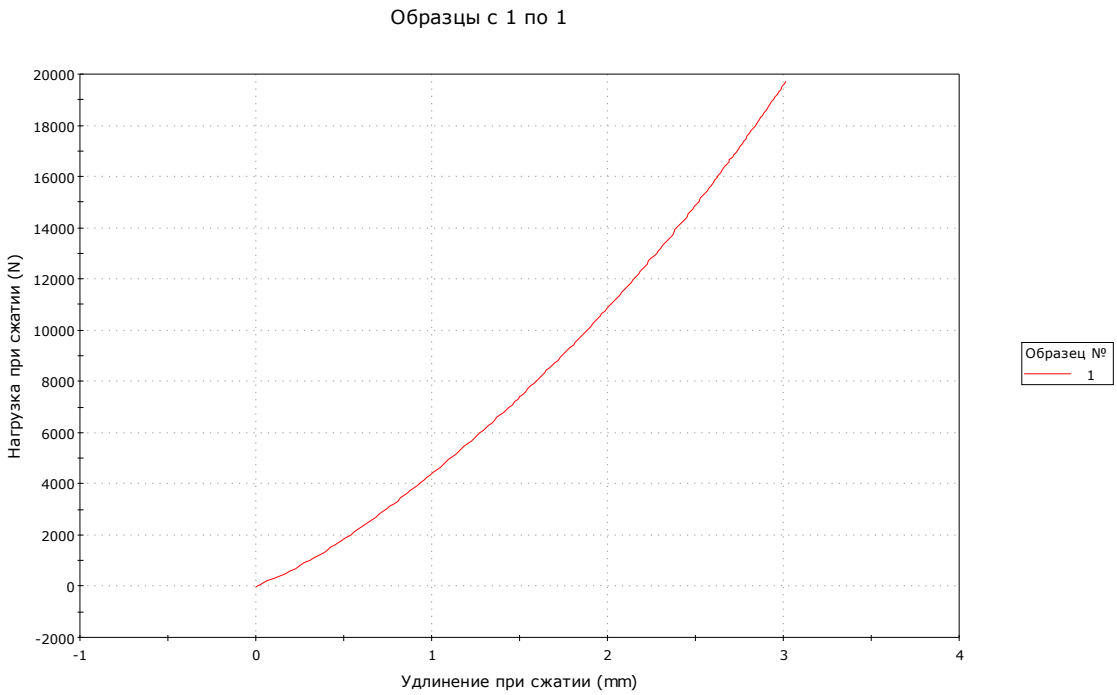


Рис.3. График зависимости сил от величины осадки цилиндрического образца.

Из графика, представленного на рис. 3, определяем численные значения степеней деформации в соответствующих точках (λ_i) и напряжения, как отношения сил осадки к фактической площади поверхности контакта рабочего инструмента с образцом, которая так же подвергалась измерению в ходе выполнения эксперимента.

Для n=7, в соответствии с (20), (21), были получены следующие результаты:

$$C_{10} = 1.45 \text{ МПа}$$
$$C_{01} = 0.62 \text{ МПа}$$

Дополнительно был нагружен призматический образец, который был помещен в специальный контейнер (рис. 4), для реализации плоско-деформированного состояния.

Контейнер изготовлен из двух стальных боковых стенок шириной 9мм, стальной донной части и стального пуансона, двух обзорных стенок из оргстекла толщиной 10мм. Нижняя часть пуансона и верхняя грань донной части также изготовлены из оргстекла для получения одинакового трения по всем поверхностям во время деформации.

Образец 1 укладывают в оснастку для испытаний на прокладку 6, которая закреплена на основании 2. Направляющие 4, которые расположены между стенками 5, имеют толщину несколько большую, чем пуансон 3, таким образом, пуансон имеет посадку с гарантированным зазором. Во время испытания образец сдавливается обкладками 6. Стенки 5 ограничивают перемещение образца таким образом, что образец деформируется в двух направлениях: в направлении действия силы со стороны пуансона и в направлении собственной оси.

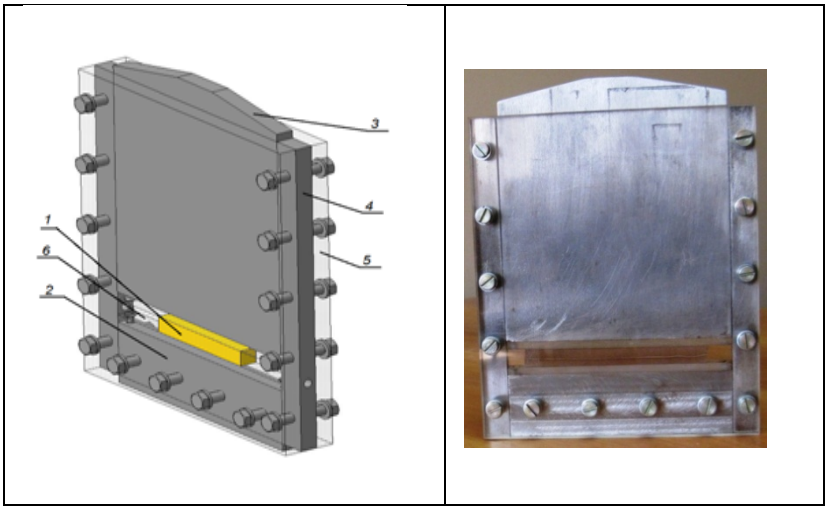


Рис.4 Контейнер со снятыми укрепляющими стенками и образец в собранном виде.

Деформация призматического образца проходила по плоской схеме, изображенной на рис.5.

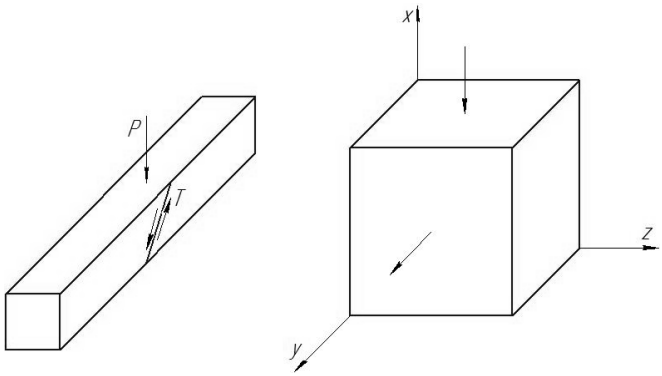


Рис.5. Схема нагружения и деформированное состояние образца, соответствующее испытанию на чистый сдвиг.

На рис. 6 показан вид оснастки, расположенной в испытательной машине для испытаний на чистый сдвиг, с загруженным внутрь призматическим образцом.

Рис.6. Осадка призматического образца.

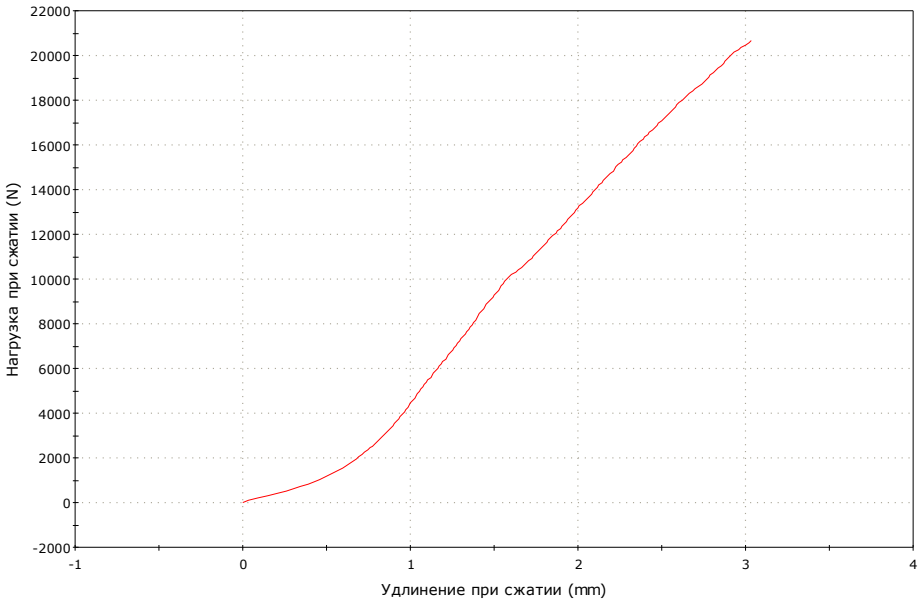


Рис.7. График зависимости сил от величины осадки призматического образца.

Для того чтобы оценить правильность полученных результатов и их пригодность для теоретических расчетов, решим, по сути, обратную задачу: используя определенные на этапе экспериментального исследования константы Муни-Ривлина как исходные, смоделируем поставленные эксперименты. В случае, если результаты теоретического решения совпадут с приемлемой точностью с экспериментальными результатами, данные коэффициенты Муни-Ривлина будут считаться пригодными для дальнейшего использования при моделировании полиуретана СКУ-7Л.

Была разработана математическая модель данных экспериментов с использованием специализированного программного комплекса «Ansys».

При моделировании были приняты следующие характеристики материалов.

Заготовка №1 – цилиндр с высотой 10 мм и диаметром 65 мм из полиуретана СКУ–7Л: плотность 3000 кг/м^3, коэффициент Пуассона 0.49, константы двухпараметрической модели Муни-Ривлина C_1=1.45, C_2=0.62. Заготовка №2 – призма прямоугольного сечения 10х9 мм, длиной 100 мм из полиуретана СКУ–7Л:

плотность 3000 кг/м^3, коэффициент Пуассона 0.49, константы двухпараметрической модели Муни-Ривлина C_1=1.45, C_2=0.62.

Результаты расчета представлены на рис.8-15.

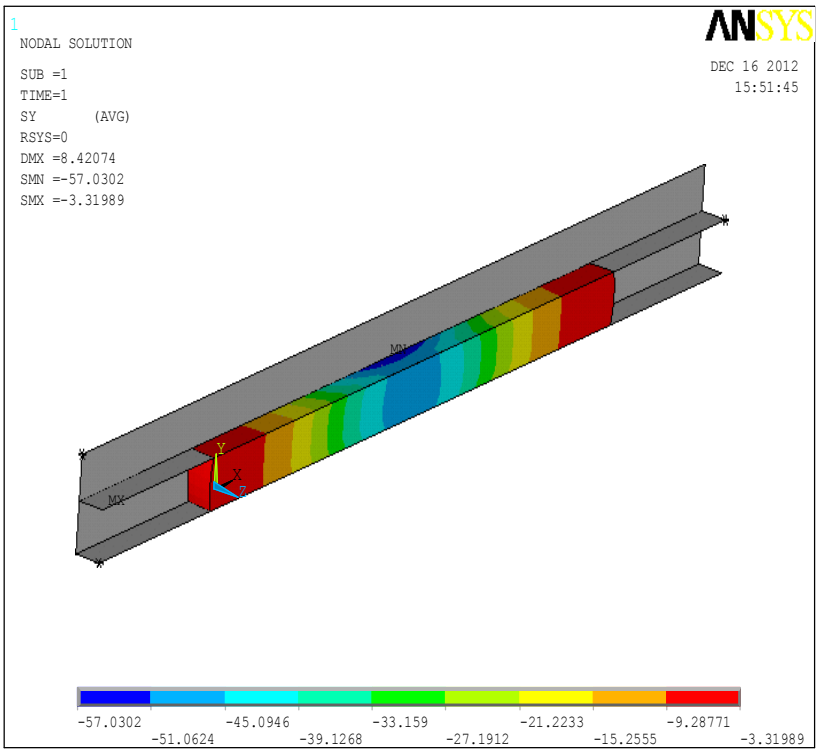


Рис.8. Поле напряжений по оси Y.

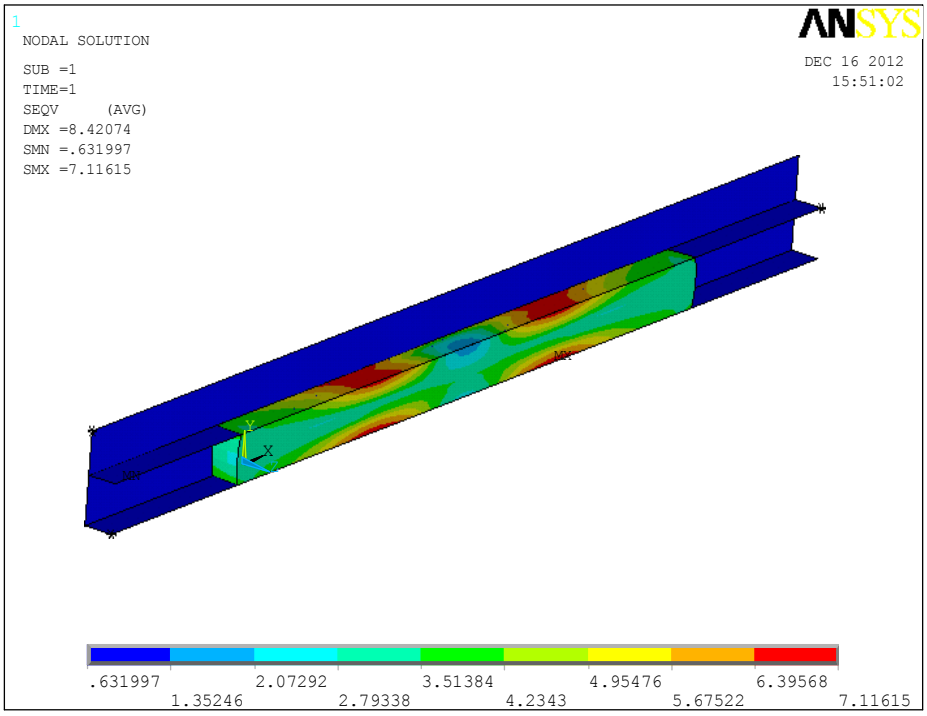


Рис.9. Поле эквивалентных напряжений.

На рис. 8 показано поле напряжений по оси Y. Максимум напряжений достигается в центральной части заготовки и составляет 57 МПа. Далее, по мере удаления от центра, он уменьшается сначала до значений 27 МПа, и ближе к краю образца - до 3,3 МПа.

На рис. 9 представлено поле распределения эквивалентных напряжений (по Мизесу) в заготовке при ее деформировании. Результаты решения показывают, что максимальные эквивалентные напряжения составляют величину порядка 7 МПа.

На рис. 10 показано поле суммарных перемещений заготовки при деформировании. Максимальное перемещение на величину порядка 8,4 мм совершают торцевые области, при удалении от которых значения перемещений монотонно уменьшаются вплоть до нуля в центральной части заготовки. На рис. 11 показано поле эквивалентных деформаций.

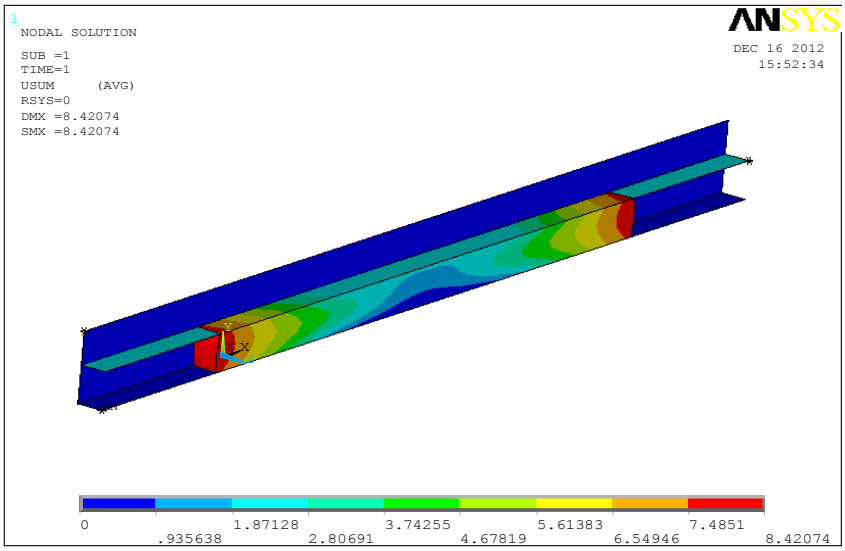


Рис.10. Поле суммарных перемещений.

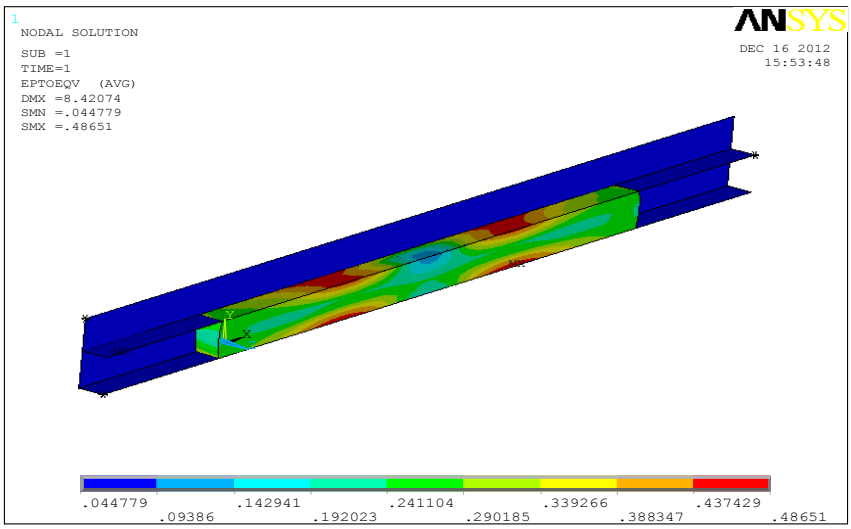


Рис.11. Поле эквивалентных деформаций.

На рис. 12 показано поле распределения эквивалентных напряжений (по Мизесу) в цилиндрической заготовке при ее деформировании. Результаты решения показывают, что максимальные эквивалентные напряжения составляют величину порядка 5,7 МПа в центральной части заготовки. На рис. 13 представлено поле напряжений по оси заготовки. Максимум напряжений достигается в центральной части заготовки и составляет 18,6 МПа. Далее, по мере удаления от центра, значения напряжений уменьшаются сначала до 15МПа, затем до 10Мпа и ближе к боковой области – до 4 Мпа.

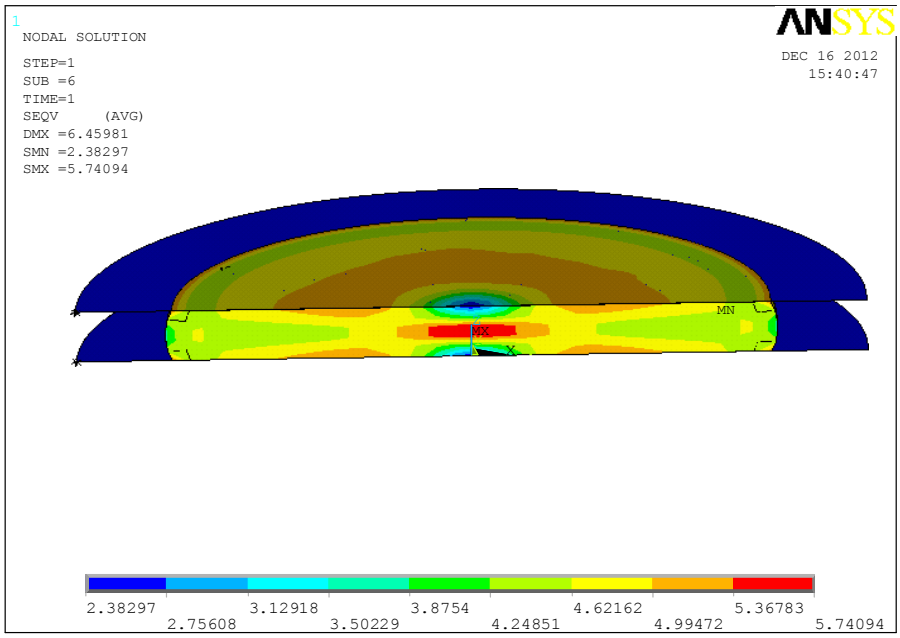


Рис.12. Поле эквивалентных напряжений.

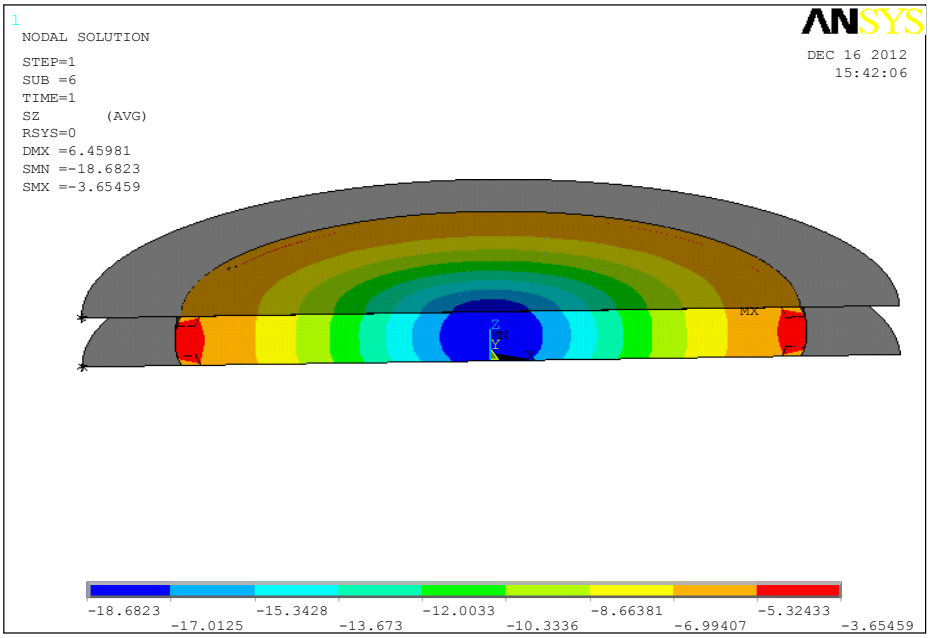


Рис.13. Поле напряжений по оси Z.

На рис.14 показано поле суммарных перемещений заготовки при деформировании осаживающим инструментом. Из рисунка видно, что максимальное перемещение на величину порядка 6,5 мм совершает боковая область, по мере удаления от которой значения перемещений монотонно уменьшаются вплоть до нуля в центральной части заготовки. На рис. 15 показано поле эквивалентных деформаций. Из рисунка видно, что вид поля деформаций практически совпадает с видом поля эквивалентных напряжений. Максимум достигается в центральной части заготовки, и равен 0,44.

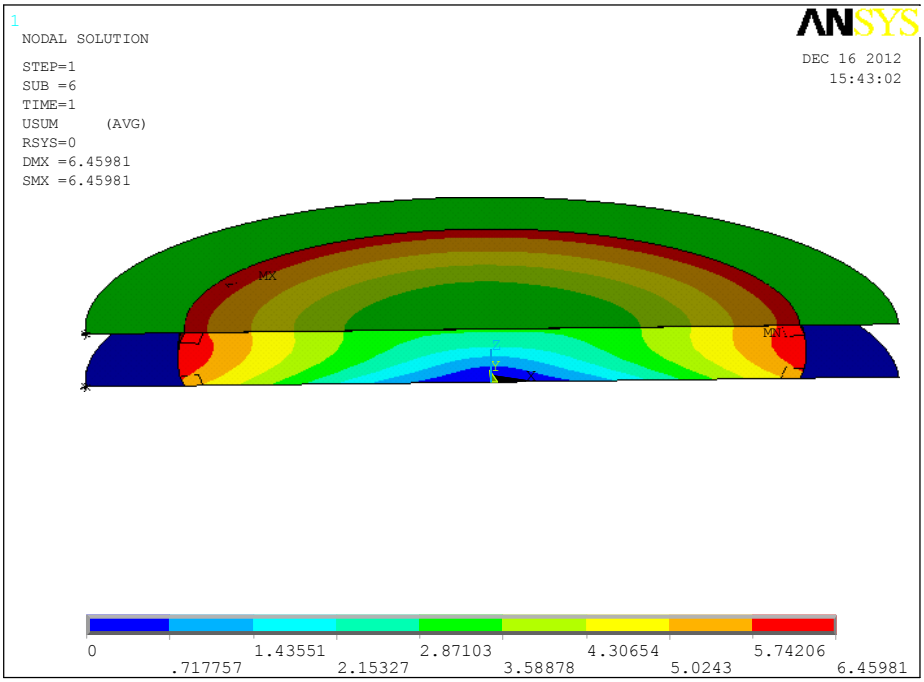


Рис.14. Поле суммарных перемещений.

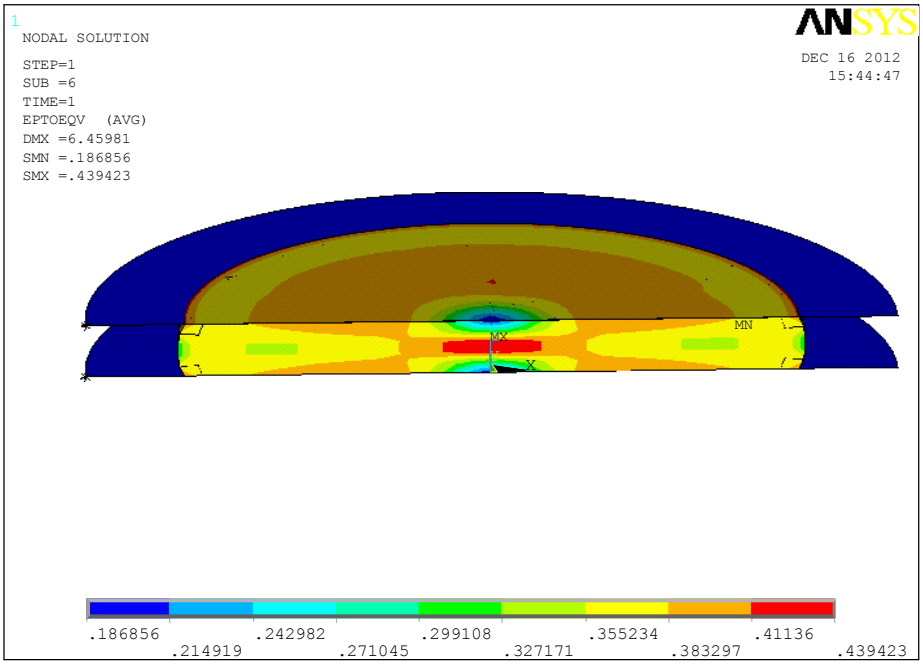
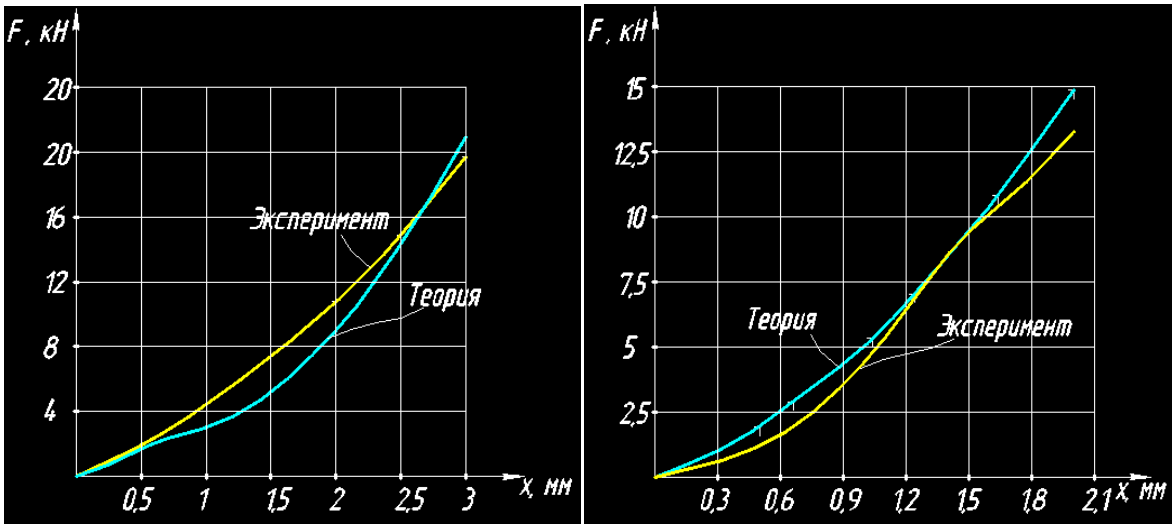


Рис.15. Поле эквивалентных деформаций.

Сравнение результатов.

Сравним результаты теоретического решения с результатами экспериментальными. Сравнение проведем по зависимостям сил от величины осадки (для обеих заготовок) и по форме боковой поверхности (только для цилиндрической заготовки).



а) б)

Рис. 16. Сравнение зависимости сил от величины осадки для теоретического решения и эксперимента.

а) – цилиндрическая заготовка; б) – призматическая заготовка.

Для цилиндрической заготовки сравнение максимальных усилий дает следующую погрешность:

$$F^{\text{эксперимент}}_{\text{цилиндр,3мм}} = 19.704 \text{ кН}$$
$$F^{Ansys}_{\text{цилиндр,3мм}} = 20.875 \text{ кН}$$

$$\delta = \frac{F^{\text{эксперимент}}_{\text{цилиндр,3мм}} - F^{Ansys}_{\text{цилиндр,3мм}}}{F^{\text{эксперимент}}_{\text{цилиндр,3мм}}} = 5.94\%$$

Для призматической заготовки:

$$F^{\text{эксперимент}}_{\text{призма,2мм}} = 13.283 \text{ кН}$$
$$F^{Ansys}_{\text{призма,2мм}} = 14.881 \text{ кН}$$

$$\delta = \frac{F^{\text{эксперимент}}_{\text{призма,2мм}} - F^{Ansys}_{\text{призма,2мм}}}{F^{\text{эксперимент}}_{\text{призма,2мм}}} = 10.7\%$$

Наконец, сравним формы боковых поверхностей деформированного цилиндрического образца, полученные в ходе выполнения эксперимента и теоретического решения, путем наложения соответствующих изображений (рис.17).

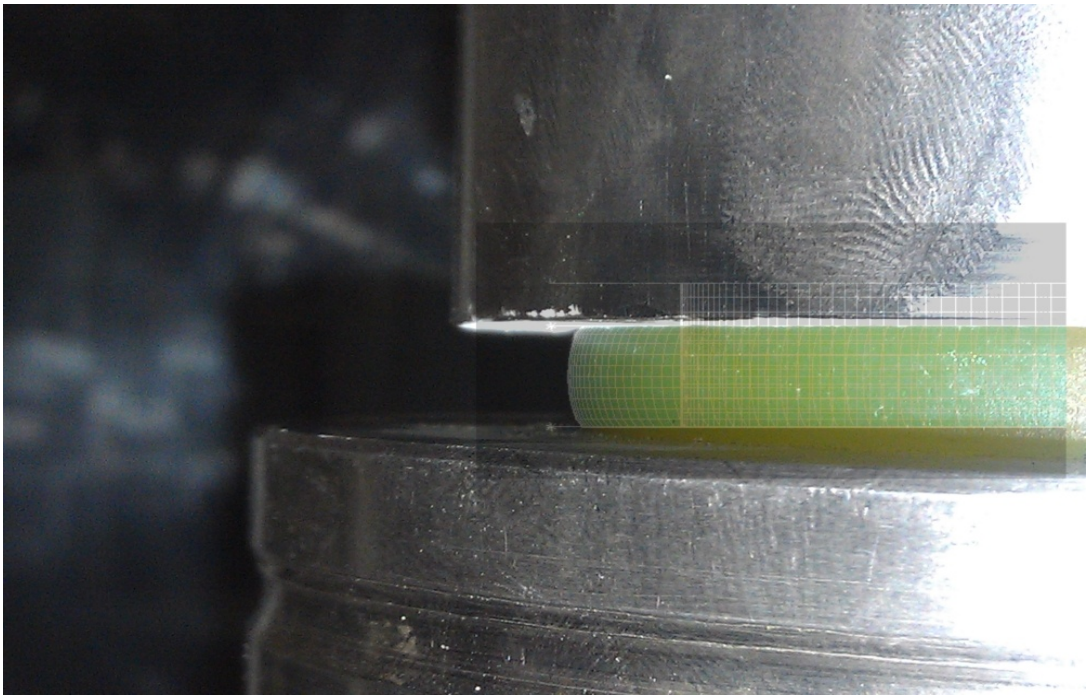


Рис.17. Сравнение формы боковых поверхностей.

Вывод: Сравнение имеющихся результатов решения прямой и обратной задач (определение коэффициентов Муни-Ривлина, исходя из напряженно-деформированного состояния, и определение напряженно-деформированного состояния, исходя из коэффициентов Муни-Ривлина) позволяет заключить: определенные по вышеизложенной методике константы Муни-Ривлина являются пригодными для проведения теоретических расчетов, связанных с деформированием эластомеров.

Литература

1. *Бухина М.Ф.* Техническая физика эластомеров.–М: Химия, 1984. – 224 с.
2. *Муйземнек А.Ю.* Описание поведения материалов в системах автоматизированного инженерного анализа. – Пенза: - Информационный издательский центр ПГУ, 2005, – 320 с.